

Instituto Politécnico Nacional
ESIME Culhuacan
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Guía de Matemáticas

Algebra Lineal

1. Hallar el rango de la matriz A , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Sea W el subespacio de \mathbf{R}^4 generado por
 $u_1 = (1, -2, 5, -3)$, $u_2 = (2, 3, 1, -4)$, $u_3 = (3, 8, -3, -5)$.
- a) Hallar una base y la dimensión de W .
b) Extender la base de W a una del espacio \mathbf{R}^4 completo.
2. Considérense los vectores $u = 2i - 3j + 4k$, $v = 3i + j - 2k$, $w = i + 5j + 3k$. Encontrar: a) $u \times v$,
b) $u \times w$, c) $v \times w$.
3. Encontrar un vector unitario u ortogonal a $v = (1, 3, 4)$ y a $w = (2, -6, 5)$.
4. Demostrar la identidad de Lagrange: $\|u \times v\|^2 = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2$.
5. Determinar si los vectores $(1, -2, -3)$, $(2, 3, -1)$ y $(3, 2, 1)$ son linealmente dependientes.
6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar todos los vectores $u = (x, y, z)^T$ tales que $A(u) = 0$
7. Determinar x, y, z, s, t si $A = \begin{pmatrix} x & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & y \\ z & s & t \end{pmatrix}$ es ortogonal.
8. Encontrar una matriz ortogonal 3×3 , P , cuya primera fila sea un múltiplo de $u_1 = (1, 1, 1)$ y cuya segunda fila lo sea de $u_2 = (0, -1, 1)$.

9. Considérese un móvil B cuya posición en el instante t viene dada por $R(t)=t^3\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$. Donde $V(t)=dR(t)/dt$ denota la velocidad de B y $A(t)=dV(t)/dt$ su aceleración.
- Determinar la posición de B cuando $t=1$.
 - Determinar la velocidad, v , de B cuando $t=1$.
 - Determinar la rapidez, s , de B cuando $t=1$.
 - Determinar la aceleración, a , de B cuando $t=1$.
10. Considérese la superficie $xy^2+2yz=16$ en \mathbf{R}^3 . Encontrar: a) el vector $\mathbf{N}(x,y,z)$ normal a la superficie, b) el plano H tangente a la superficie en el punto $P(1,2,3)$.
11. Considérese la función $f(x,y)=x^2+y^2$ para la que $z=x^2+y^2$ representa una superficie S en \mathbf{R}^3 . Determinar: a) el vector N normal a la superficie para $x=2, y=3$, b) el plano H tangente a la superficie S para $x=2, y=3$.
12. Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
13. Encontrar una matriz triangular superior A tal que $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -57 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.
14. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ una matriz simétrica. Hallar: a) una matriz no singular P tal que $P^T A P$ sea diagonal, esto es, la matriz diagonal $B = P^T A P$, b) la signatura de A .
15. Encontrar la matriz simétrica B , asociada a la forma cuadrática:
- $q(x,y) = 4x^2+5xy-7y^2$ y b) $q(x,y,z) = 4xy+5y^2$
16. Sea $q(x,y,z) = x^2+2y^2-4xz-4yz+7z^2$. ¿Es q definida positiva?
17. Sea B una matriz no singular arbitraria y sea $M = B^T B$. Demostrar que a) M es simétrica, b) M es definida positiva.
18. Expresar el polinomio sobre \mathbf{R} $v = t^2 + 4t - 3$ como combinación lineal de los polinomios $p_1 = t^2 - 2t + 5, p_2 = 2t^2 - 3t, p_3 = t + 3$.
19. Sea $w = (1,2,3,1)$ un vector en \mathbf{R}^4 . Encontrar una base ortogonal de w^\perp .
20. Considere la forma cuadrática $q(x,y)=3x^2 + 2xy - y^2$ y la sustitución lineal $x = s - 3t, y = 2s + t$.

- Reescribir $q(x,y)$ en notación matricial y hallar la matriz A que representa la forma cuadrática.
- Reescribir la sustitución lineal empleando la notación matricial y encontrar la matriz P correspondiente a la sustitución.
- Hallar $q(s,t)$ utilizando sustitución directa.
- Hallar $q(s,t)$ usando notación matricial.

21. Encontrar la factorización LU de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

22. Sea W el subespacio de \mathbf{R}^4 generado por $u_1 = (1, -2, 5, -3)$, $u_2 = (2, 3, 1, -4)$, $u_3 = (3, 8, -3, -5)$.

- a) Hallar una base y la dimensión de W .
- b) Extender la base de W a una del espacio \mathbf{R}^4 completo.

23. Sea V el espacio vectorial de las matrices reales 2×2 . Encontrar la dimensión y una base del subespacio W de V generado por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

24. Determinar si las siguientes matrices tienen el mismo espacio fila:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

25. Hallar el rango de la matriz A , donde:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

26. Hallar la dimensión y una base del espacio solución del sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 0 \\ 2x + 4y + 4z - t &= 0 \\ 3x + 6y + 7z + t &= 0 \end{aligned}$$

27. Expresar $v = (1, -2, 5)$ en \mathbf{R}^3 como combinación lineal de los vectores u_1, u_2, u_3 , siendo $u_1 = (1, -3, 2)$, $u_2 = (2, -4, -1)$, $u_3 = (1, -5, 7)$.

28. Escribir la matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

29. Determinar si $u = 1 - 3t + 2t^2 - 3t^2$ y $u = -3 + 9t - 6t^2$ son linealmente dependientes.

30. Determinar si $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ y $(2, -1,1)$ constituyen una base del espacio vectorial \mathbf{R}^3 .

31. Sea V el espacio vectorial de las matrices reales 2×2 . Determinar si constituyen una base de V .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

32. Mostrar que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3}i & -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$ es unitaria.

33. Sean $u = (5,4,1)$ y $v = (3,-4,1)$ y $w = (1,-2,3)$. ¿Qué pares de dichos vectores son perpendiculares?

34. Determinar el valor k para que los vectores u y v sean ortogonales, si:

$$u = (1, k, -3) \quad v = (2, -5, 4)$$

35. Normalizar $w = (4,-2,-3,8)$.

36. Hallar la distancia $d(u,v)$ entre los vectores u y v donde $u = (3,-5,4)$ y $v = (6,2,-1)$.

37. Determinar $\cos \theta$, donde θ es el ángulo entre $u = (1,2,-5)$ y $v = (2,4,3)$.

38. Determinar $\text{proy}(u,v)$, donde $u = (1,-3,4)$ y $v = (3,4,7)$.

39. Determinar la conjugada de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 + 3i & 3 - 5i & 4 + 8i \\ 6 - i & 2 - 9i & 5 + 6i \end{pmatrix}$

40. Hallar A^H cuando $A = \begin{pmatrix} 2 - 3i & 5 + 8i \\ -4 & 3 - 7i \\ -6 - i & 5i \end{pmatrix}$

41. Escribir $A = \begin{pmatrix} 2 + 6i & 5 + 3i \\ 9 - i & 4 - 2i \end{pmatrix}$ en la forma $A = B + C$, donde B es hermítica y C antihermítica.

42. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar $g(A)$, siendo $g(x) = x^2 - x - 8$

43. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Encontrar un vector columna no nulo $u = (x, y)^T$ tal que $A(u) = 3u$

44. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar todos los vectores $u = (x, y, z)^T$ tales que $A(u) = 0$

45. Encontrar todas las matrices $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo

46. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

(a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.

(b) Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

47. Dadas las funciones $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

48. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

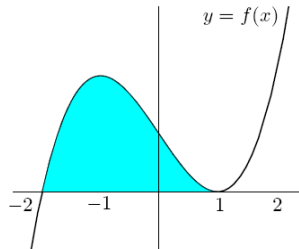
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Determina el valor de α sabiendo que f es derivable.
 (b) Haz un esbozo de la grafica de f .

49. Se quiere dividir la región encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante la recta $y = a$. Halla el valor de a

50. Se sabe que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es la que aparece en el dibujo.

- (a) Determina f .
 (b) Calcula el área de la región sombreada.



51. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y normal, a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, en (x', y', z') .

52. Derive por diferenciación parcial la siguiente expresión:
 $u = e^x \sin y + e^y \sin x$

53. Encuentre el ángulo de intersección entre los círculos:
 $r = a \sin \theta + b \cos \theta$, $r = a \cos \theta + b \sin \theta$

54. Encuentre el radio de curvatura de la siguiente curva:
 $y = \log x$, cuando $x = \frac{3}{4}$

55. Encuentre el orden de contacto de las siguientes curvas:
 $y = x^3$, y $y = 3x^2 - 3x + 1$

56. Integre las siguientes expresiones:

a) $\int \left(\sqrt[4]{\frac{x^3}{a^3}} - \sqrt[4]{\frac{a^3}{x^3}} \right)^3 dx$ b) $\int \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \right)^4 dx$

57. Resolver:

$$\int (e^{4x} + a^{5x} + 3b^{-2x}) dx$$

58. Resolver:

$$\int \frac{d\theta}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \operatorname{cos}^2 \theta}$$

59. Resolver:

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$$

60. Resolver:

$$\int \frac{(x+1) dx}{4x^5 - 17x^3 + 4x}$$

61. Resolver:

$$\int \frac{x^5 + x^3 - 1}{x^2(x^2 + 1)^2} dx$$

62. Resolver:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$$

63. Resolver:

$$\int \operatorname{sen}^8 \phi \operatorname{cos}^7 \phi d\phi$$

64. Evaluar la siguiente integral definida:

$$\int_0^\pi \int_0^{a(1+\operatorname{cos}\theta)} r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta dr$$

65. Evaluar la siguiente integral definida:

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

66. Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas

67. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + 4e^{-x}$.

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.

68. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x-3)^2$.

Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Haz un esbozo de la gráfica de f .

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas

69. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante $f(x) = x^3 - 4x$ y $g(x) = 3x - 6$

Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g

Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas

70. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 2$

Esboza las gráficas de f y g .

Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

71. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$.

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

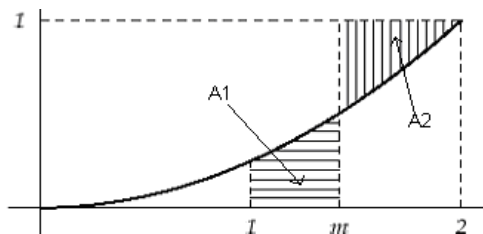
Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área

72. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x/2}$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f , la recta de ecuación $x = 2$ y la recta tangente obtenida en (a).

73. En la figura adjunta se ve representada en el intervalo $[0; 2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2/4$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas sean iguales.



74. Halla una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto $M(0,1)$, que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$ y que $f''(x) = 3x^2$.

75. Encuentre los coeficientes de Fourier para la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \text{Período} = 10$$

Escriba la serie de Fourier correspondiente.

76. Expanda $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ en una serie de Fourier a) si el período es 2π b) si el período no es especificado.

77. Compruebe que:

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Mt = \frac{\text{sen} \left(M + \frac{1}{2} \right) t}{2 \text{sen} \frac{1}{2} t}$$

78. Muestre que el siguiente conjunto de funciones:

$$1, \text{sen} \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{\pi x}{L}, \text{sen} \frac{2\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \text{sen} \frac{3\pi x}{L}, \cos \frac{3\pi x}{L}, \dots$$

Forma un conjunto ortogonal en el intervalo $(-L, L)$

79. Encontrar la serie de Fourier y graficar tres períodos de la siguiente función (la cual tiene un período de 2π):

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi & 0 < x < \pi \end{cases}$$

80. Considere dos funciones $f(t) = h(t)h(3-t)$ y $g(t) = h(t) - h(t-3)$

a) ¿son las funciones idénticas?

b) Muestre que $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$

81. Encuentre:

a) $\mathcal{L}[e^{2t}]$ b) $\mathcal{L}[e^{3t} \cos 2t]$ c) $\mathcal{L}^{-1}[e^{-2t} s^2]$

82. Aplica transformadas de Laplace para resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - 4y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

83. Usando fracciones parciales, encuentre:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s + 6}{s^2 + 3s} \right]$$

84. Usando el teorema de convolución encuentre la transformada inversa de Laplace de:

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$$

Probabilidad

85. Un proveedor de servicios de Internet utiliza 50 módems para satisfacer las necesidades de 1000 clientes. Se estima que en un momento dado, cada cliente necesitará una conexión con probabilidad 0.01, independiente de los otros clientes.
- (a) ¿Cuál es la función de masa de probabilidad (PMF) del número de módems en uso en el momento dado?
- (b) Repita la parte (a) aproximando el PMF del número de clientes que necesita una conexión con una distribución de Poisson PMF.
- (c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más clientes que necesiten una conexión que módems? Proporcione una fórmula aproximada basada en la aproximación de Poisson de la parte (b).
86. Sea X una variable aleatoria que toma valores de 0 a 9 con igual probabilidad $1/10$.
- (a) Encuentre el PMF de la variable aleatoria $Y = X \bmod (3)$.
- (b) Encuentre el PMF de la variable aleatoria $Y = 5 \bmod (X + 1)$.
87. Sea X una variable aleatoria con PMF.
88. En una clase 60% de los estudiantes son considerados “genios”, 70% “aman el chocolate” y 40% caen en ambas categorías. Determine la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar no sea un genio ni un amante del chocolate.
89. Un dado de seis caras se carga de manera que cada cara par tiene el doble de probabilidades que cada cara impar. Todas las caras pares son igualmente probables, al igual que todas las caras impares. Construya un modelo probabilístico para una sola tirada de este dado y encuentre la probabilidad de que el resultado sea menor que 4.
90. Se inspecciona un lote de cien artículos probando cuatro artículos seleccionados al azar. Si uno de los cuatro está defectuoso, se rechaza el lote. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea aceptado si contiene cinco defectuosos?
- 91.

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a}, & \text{si } x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

- (a) Encuentre σ y $E[X]$.
- (b) ¿Cuál es el PMF de la variable aleatoria $Z = (X - E[X])^2$?
- (c) Usando el resultado de la parte (b), encuentre la varianza de X .
- (d) Encuentre la varianza de X usando la fórmula $var(X) = \sum_x (x - E[X])^2 px(x)$

92. Dos monedas son lanzadas simultáneamente hasta que una de ellas cae cara y la otra cruz. La primera moneda tiene probabilidad p y la segunda probabilidad q . Todos los lanzamientos son independientes.

- (a) Encuentre el PMF, el valor esperado y la varianza del número de lanzamientos.
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el último lanzamiento de la primera moneda sea una cara?

93. Sea X distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Considere que la variable aleatoria $Y = g(X)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 1/3 \\ 2, & \text{si } x > 1/3 \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de Y derivando primero su PMF. Verifique el resultado utilizando la regla del valor esperado.

94. Si X tiene una función de densidad de probabilidad (PDF)

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

donde λ es un escalar positivo. Verifique que f_X satisfaga la condición de normalización, y evalúe la media y la varianza de X .

95. Considere un triángulo y un punto elegido dentro del triángulo de acuerdo con la ley de probabilidad uniforme. Sea X la distancia desde el punto hasta la base del triángulo. Dada la altura del triángulo, encuentre la función de distribución acumulativa (CDF) y el PDF de X .

96. La temperatura de una ciudad se modela como una variable aleatoria normal con media y desviación estándar ambas iguales a 10 grados centígrados. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura en un momento elegido al azar sea menor o igual a 59 grados Fahrenheit?

97. Suponga que X y Y son variables aleatorias con la misma varianza. Muestre que $X - Y$ y $X + Y$ no están correlacionados.

98. Encuentre los momentos tercero, cuarto y quinto de una variable aleatoria exponencial con parámetro λ .
99. Vas a una fiesta con 500 invitados. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente otro invitado tenga el mismo cumpleaños que tú? Calcule esto exactamente y también aproximadamente usando la distribución de Poisson PMF. (Para simplificar, excluya los cumpleaños el 29 de febrero).
100. Una familia tiene 5 hijos naturales y ha adoptado 2 niñas. Cada hijo natural tiene la misma probabilidad de ser niña o niño, independientemente de los demás hijos. Encuentre el PMF del número de niñas de los 7 niños.